不确定性原理简介

醉放先生著

海森堡不确定性原理是由德国物理学家海森堡于1927年提出的量子力学中的不确定性。

1.不确定原理推导

当两个算符 A 和 B 作用于一个函数 $\psi(x)$ 时，它们不一定会对易。设定 B 为乘以 x ，设定 A 为取随着 x的导数。那么，

$$(AB-BA)\psi=\frac{d}{dx}(x\psi)-x\frac{d}{dx}\psi=\psi$$ 。

使用算符语言，可以表达为

$$\frac{d}{dx}x-x\frac{d}{dx}=1$$ 。

位置算符 x 和动量算符 p 的正则对易关系是

$$[x,\,p]=(xp-px)=-i\hbar x\frac{d}{dx}+i\hbar\frac{d}{dx}x=i\hbar$$ 。

在希尔伯特空间内，任意两个态矢量 $|\alpha\rangle$ 和 $|\beta\rangle$ ，必定满足柯西-施瓦茨不等式

$\langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle \geq |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$ 。

限制算符 A 和 B 为厄米算符。它们所代表的都是可观察量。设定

$\alpha = A\psi$ ，

$\beta = B\psi$ 。

那么

$\langle A\psi|A\psi\rangle\langle B\psi|B\psi\rangle \geq |\langle A\psi|B\psi\rangle|^2$ 。

$|\langle A\psi|B\psi\rangle|^2 \geq |\mathbf{im}(\langle A\psi|B\psi\rangle)|^2 = \frac{1}{4}|2\ \mathbf{im}(\langle A\psi|B\psi\rangle)|^2$ ；

其中$\mathbf{im}$ 表示取右边项目的虚数。

$\mathbf{im}(\langle A\psi|B\psi\rangle) = \frac{\langle A\psi|B\psi\rangle - \langle A\psi|B\psi\rangle^*}{2i} = \frac{\langle\psi|[A,\ B]|\psi\rangle}{2i}$ ，

得罗伯森-薛丁格关系式：

$\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A,\ B]\rangle|^2$ 。

执行以下替换

$A \rightarrow A - \langle A\rangle$ ，

$B \rightarrow B - \langle B\rangle$ 。

那么

$$\langle(A-\langle A\rangle)^2\rangle\langle(B-\langle B\rangle)^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[A-\langle A\rangle,\ B-\langle B\rangle]\rangle|^2 = \frac{1}{4}|\langle[A,\ B]\rangle|^2$$

定义标准偏差 ΔX 为

$$\Delta X \equiv \sqrt{\langle (X - \langle X \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2}$$

则可得到任意两个可观察量算符的不确定性原理

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [A, B] \rangle|$$

2.位置与动量

$$[x, p] = i\hbar$$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

3.时间与能量

根据埃伦费斯特定理（Ehrenfest theorem）

$$\frac{d}{dt}\langle B \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H, B] \rangle + \left\langle \frac{\partial B}{\partial t} \right\rangle$$ 。

其中，t 是时间，H 是哈密顿算符。

一般而言，算符不显性地相依于时间。取絶对值

$$|\langle [H, B] \rangle| = \hbar \left| \frac{d}{dt}\langle B \rangle \right|$$ 。

不确定性原理阐明，对于任意两个可观察量算符 H 和 B

$$\Delta H \Delta B \geq \frac{1}{2} |\langle [H, B] \rangle|$$ 。

所以

$$\Delta H \Delta B \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d}{dt}\langle B \rangle \right|$$ 。

对于量子态 $|\psi\rangle$ ，哈密顿算符与能量 E 的关系是

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$ 。

设定

$$\Delta t = \frac{\Delta B}{\left|\frac{d}{dt}\langle B\rangle\right|}$$ 。

那么

$$\Delta E \Delta t \ge \frac{\hbar}{2}$$

4.共轭量

共轭物理量指在量子力学中其算符不对易的物理量。它的概念来自于哈密顿力学，其中共轭动量表述为拉格朗日函数对广义速度的偏微分：

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$$

在量子力学中，物理量 A 和 B 共轭的定义为，其算符不满足对易关系：

$$\left[\hat{A}, \hat{B}\right] \ne 0$$

它们的不确定关系

$$\Delta_\psi A \, \Delta_\psi B \ge \frac{1}{2}\left|\langle[A, B]\rangle_\psi\right|$$

测量一对共轭量的误差（标准差）的乘积必然大于常数 h/4π，是物理学一条重要原理。

测量不确定原理表明：一个微观粒子的某些物理量，不可能同时具有

确定的数值，其中一个量越确定，另一个量的不确定程度就越大。宿命论已被现代量子物理否定了。

微观世界的粒子有许多共轭量，比如位置和速度，时间和能量,方位角与动量矩就是一对共轭量，共轭量满足“测量不确定原理”。

我们在实际生活中也常常遇到像物理共轭量的一对“共轭关系”，如法律上的不冤枉、不纵容。我们不可能找到一部无纵无枉的法律，当然，宁纵勿枉的法律总好过宁枉勿纵的法律，但又纵又枉的法律则是一部恶毒的法律。又如，我们不可能同时降低生产者风险和消费者风险，不可能同时降低信度与效度等等。