Wick 旋转和能量动量复变函数背后的物理意义

冼卓鹏　httpp://xian.name
中国佛山市三水区

摘要：通过 wick 旋转、能量动量复变函数的全纯及留数理论，推导出波动理论、相对论、量子力学的一些公式，并寻求经典力学、相对论力学、波动理论、热力学、量子力学等物理学各分支所隐含的联系。
关键词：Wick 旋转、能量动量张量、熵、物质波、薛定谔方程。

1 能量动量张量

我们所在的世界可用三维空间一维时间的世界点来表述。为了方便，我们只研究一维空间一维时间。
定义时空点。

$$w = r + it = re_r + ite_t \tag{1}$$

r 是位置，t=cs，c：光速，s：秒。
定义时间空间张量。

$$dw = dr + idt = dre_r + idte_t \tag{2}$$

定义能量动量张量。

$$T = mv + im = mve_p + ime_m \tag{3}$$

其中 m 是质量，动量 p=mv。显然，T 是能量-动量复变函数。
基本假设：世界中任一物质都可以用复变函数 T 来表示。
把 T 看作为 m、r、t 的函数，即：

$$T = mv(r,t) + im(r,t) \tag{4}$$

根据有关复函数的性质，得：

$$(mv)^2 + m^2 = cons\tan t \tag{5}$$

$$|dw|^2 = |dr|^2 + |dt|^2 = \text{constant} \tag{6}$$

2 wick 旋转

Wick 旋转是：

$$t' = \text{-i}t \tag{7}$$

再一次 wick 旋转：

$$t'' = \text{-}t$$

对于

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

当 θ=π/2:
即

$$e^{i\frac{\pi}{2}}dw = idw = idr - dt$$

这个变换我们称之为时空反演变换。
作二次时空反演变换：

$$i \times idw = -dr - idt$$

就时间而言，是二次 wick 旋转的结果

3 狭义相对论

对于

$$|dw|^2 = |dr|^2 + |dt'|^2 = \text{constant}$$

作 wick 旋转：

$$t = \text{-i}t'$$

得：

$$|dr|^2 \text{-} |dt|^2 = \text{constant}$$

对于光子，得：

$$|dr|^2 \text{-} |dt|^2 = 0 \qquad （8）$$

Wick 旋转相当于狭义相对论中不同惯坐标系之间的变换。

4 张量变换规律

由狭义相对论的结论，得：

$$dt_0 = \sqrt{1-v^2}\,dt$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-v^2}}$$

得：

$$T = \frac{m_0}{dt\sqrt{1-v^2}}(dr + idt) = \frac{m_0}{dt_0}dw$$

即

$$T = mv + im$$

与

$$dw = dr + idt$$

有相同的张量变换规律。

5 类空间

对于

$$dw = dr + idt$$

当|v|<1 时，称为类时区。
当|v|>1 时，称为类空区，得：

$$T = \frac{m_0}{idt\sqrt{v^2-1}}(dr+idt) = -i\frac{m_0 v}{\sqrt{v^2-1}} + \frac{m_0}{\sqrt{v^2-1}}$$

由于 T 与 dw 有相同的张量变换规律，因而时空反演了。
设：

$$u = \frac{1}{v} < 1$$

得：

$$T = -i\frac{m_0\frac{1}{u}}{\sqrt{[(\frac{1}{u})^2-1}} + \frac{m_0}{\sqrt{[(\frac{1}{u})^2-1}}$$

设在类空区的一个区域，一质点时间 dt、位移 dr，质量 m。由：

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-u^2}}$$

及
p=mu
得类时区观察类空区物质所得到的物理量：

$$T_- = mu - im \tag{9}$$

$$dw_- = dr - idt \tag{10}$$

因此，对于所谓的超光速物质，可以认为是负向时间里的物质，从而速度小于光速。也就是说，时空反演是类时区与类空区之间的变换。
以上结果与时间作二次 wick 旋转的结果一致。
我们在正向时间里观察，得：

$$T_+ = -mu + im \tag{11}$$

$$dw_+ = -dr + idt \tag{12}$$

6 物质波

在自然单位制中，$c = \hbar = 1$。
相速度

$$u_p = \frac{\omega}{\kappa}$$

$$u_p = v\lambda = \frac{2\pi v}{2\pi / \lambda} = \frac{m}{p} \tag{13}$$

这里 u_g 应该是类空区物质的速度。在类时区的正向时间观察，时空颠倒了，能量动量也颠倒了，得所谓的群速度是：

$$u_g = \frac{p}{m} = \frac{d\omega}{d\kappa} \tag{14}$$

7 wick 旋转后的速率

速度：

$$v = \frac{dr}{dt}$$

时间作一次 wick 旋转，得：

$$v' = -i\frac{dr}{dt}$$

时间作二次 wick 旋转，得：

$$v'' = -\frac{dr}{dt}$$

速率：

$$|v| = \left|\frac{dr}{dt}\right|$$

对 wick 旋转没有变化。

8 ΔT 与Δ(Δw)

T=mv+im 与 dw=dr+idt 有相同的张量变换规律，也就是：ΔT 与Δ(Δw)也有相同的张量变换规律。

对于温度：

$$T = \frac{\mathrm{d}E}{dS} = \frac{dm}{dS} \tag{15}$$

在一维空间一维时间，得：

$$\frac{m_0}{\Delta t_0}\Delta（\Delta \mathrm{t}）= \Delta m = TdS = bT \tag{16}$$

温度 T 一定时

$$dS \propto dm$$

其中 b 是常数。

$$\frac{1}{2} \le \Delta m \Delta t = \frac{m_0}{\Delta t_0}\Delta（\Delta t）\Delta t = m\Delta（\Delta t）$$

所以：

$$\Delta（\Delta t）\neq 0 \tag{17}$$

即绝对温标不可能达到绝对零度。

9 波粒二象性

令：

$$L(r,v)==\frac{1}{2}\sum_{i,j}v_i m_{ij} v_j=\frac{1}{2}\sum_{ij}m_{ij}\times\frac{dr_i}{dt}\times\frac{dr_j}{dt}$$

路径积分为：

$$K(r,t;r_0,t_0)=\lim_{n\to\infty}(\frac{m}{i2\pi\Delta t})^{\frac{n}{2}}\int Dre^{i\int dtL}$$

考虑一个很小的一个时间间隔

$$t\to t_0+\Delta t'$$

得：

$$K'(r_0+\Delta r,t_0+\Delta t';r_0,t_0)=<(r_0+\Delta r)|U(t_0+\Delta t',t_0)|r_0>=C\lim_{n\to\infty}(\frac{m_0}{i2\pi\Delta t'})^{\frac{n}{2}}e^{i\Delta t'\times\frac{1}{2}m_0\times\frac{\Delta r}{\Delta t'}\times\frac{\Delta r}{\Delta t''}} \quad (18)$$

对时间作

$\Delta t'=\text{-i}\Delta t$

的 wick 旋转，得：

$$K(r_0+\Delta r,t_0+\Delta t;r_0,t_0)=C\lim_{n\to\infty}(\frac{m_0}{2\pi\Delta t})^{\frac{n}{2}}\int dre^{-\int dtL}=C\lim_{n\to\infty}(\frac{m_0}{2\pi\Delta t})^{\frac{n}{2}}e^{-\Delta t\times\frac{1}{2}m_0\times\frac{\Delta r}{\Delta t}\times\frac{\Delta r}{\Delta t}} \quad (19)$$

注意到：

$$\frac{m_0}{\Delta t_0}\Delta（\Delta \mathrm{t}）=bT$$

这里的 T 是温度。
与麦克斯韦速率分布函数比较。

$$f(|v|)=\frac{1}{4\pi}(\frac{m}{2\pi kT})^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{m}{2kT}|v|^2}\times|\mathrm{v}|^2 \quad (20)$$

我们可以认为：把“粒子”看作是“波”就是作

$\Delta t=\mathrm{i}\Delta t'$

的 wick 旋转。

10 反物质

如果我们在参考系上观察一个粒子，由（9）、（10）、（11）和（12）式，当 v≠1 时，物质就有 4 种能量动量张量：

$$T_{++}=+mv+im$$

$$T_{+-}=\text{-}mv+im$$

$T_{-+} = +mv - im$

$T_{--} = -mv - im$

$T_{+} = \pm mv + im = -T_{-} = -(\mp mv - im)$ （21）

T 下标中的第一个符号表示正反物质，“+”代表正物质，“－”代表反物质；第二个符号表示旋转，“+”代表左旋，“－”代表右旋。

我们对 T_{-} 观察成 $-T_{-}$，我们把负时间的 dw_{-} 观察成 $-dw_{-}$，时间方向变成正向时间，而位移方向相反。

这 4 种能量动量张量，动量的正反向表现出来的是不同的自旋。如对于电子就是不同自旋不同电荷的 4 种能量动量张量。如光子，由于没有静质量，不存在时空反演的问题，所以只有 2 种能量动量张量。也就是说光子没有反物质。

11 引力

当所研究的区域 D 没有极点作用时，能量动量张量 T 是时空点 w 的解释函数。即；

$$T(m_0, r, t) = p(r,t) + im(r,t)$$

在区域 D 内解释。

设有一个质量为 M 的一阶极点，一个质量为 m 的质点围绕 M 作闭曲线 C 运动。

设 f(ξ)是以 C 为边界的闭区域里与 M、m 有关的解释函数，那么，在一维空间与一维时间，那个质量为 m 的质点在某一位置的能量变化为：

$$V(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta \qquad (22)$$

令：

$r = |w - \xi|$

据留数定理，得：

$$V(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\zeta)}{\zeta - w} d\zeta = -\frac{GMm}{r} \qquad (23)$$

G 是常数。所以：

$$F = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\partial \frac{GMm}{r}}{\partial r} = -\frac{GMm}{r^2} \qquad (24)$$

方向向外。

M、m 可以是质量，也可以是某方面的能量，如电荷等。

12 增熵与减熵

当一个能量为 $2\pi\nu$ 的光子受到一个相距为 r、质量为 M 的引力作用时，由（23）式，并一级近似，得：

$$2\pi\nu(1-\frac{Gm}{r})=2\pi\nu_1 \qquad (25)$$

这是红移。光子能量减少了，我们称为减熵作用。
而当受质量为-M 的斥力时：

$$2\pi\nu(1+\frac{Gm}{r})=2\pi\nu_2 \qquad (26)$$

这是蓝移。光子能量增加了，我们称为增熵作用。
空间中的物质受到位能的源点即极点的增减熵作用。在我们所在的宇宙区域正处于膨胀之中，即增熵作用大于减熵作用。

13 波动函数

能量动量张量可以用波函数来表示：

$$\varphi(p)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\psi(r)e^{-ipr}d^3r \qquad (27)$$

$$\psi(r)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\varphi(r)e^{ipr}d^3p \qquad (28)$$

也就说，我们可以把
T=mv+im
表示为坐标表象、动量表象，也可表示为：

$$\Phi=Ae^{i(pr-Et)} \qquad (29)$$

即是时间、空间、静质量的函数。

14 宏观与微观

量度信息的单位是比特(bit);一比特信息是两个相等的可能性之间决定一个所需的信息量。

如某个体系有 2^T 个可能的存在状态，那它的信息就是 r 比特。

电子有 2^2 个可能的存在状态，它有两种电荷两种自旋状态，所以单独一个电子的信息是 2bit。对于光子，自旋方向有平行与反平行于物质运动方向两种，可能存在状态应是 2^1 个，所以单独一个光子的信息是 1bit。对于由大量光子组成的一个孤立体系，左旋与右旋数量相等而混合并均匀地分布，这时这个体系的信息是 0bit。
显然，基本粒子中信息的最小容量是 1bit。
考虑在一个可逆的与外界没有作功的系统中，由能量均分原理

$$\overline{E}=\frac{3}{2}kT$$

这里的 T 是温度。
在一特定的系统，得：

$E \propto T$

$dS = \frac{dm}{T} = \frac{dE}{T}$

$\frac{dE}{E} = d(InE)$

若 $dS \geq 0$，则:

$dm \geq 0$ （30）

由相对论，得：

$dv \geq 0$

v 是组成这个特殊的孤立的不可逆体系的基本粒子的速率。

这说明了熵增加的方向就是使组成这粒子的最基本粒子的速率最终达到光速，粒子最终分解成静质量为零的最基本粒子。从相对论可得知，一个静质量不为 0 的物质是不可能被加速到光速，但我们认为它可以分解为光速的光子, 如电子－－反电子对就可以湮灭转化为一对光子。

因而，作为速度极限的光子, 是静质量为零、信息为 1bit 的粒子，它就是基本粒子无限细分的极限。

现在，我们看下列积分，并设 $w = \infty$

$$\mathrm{f}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_c \frac{f(\xi)}{\xi - w} = 0 \qquad (31)$$

因而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underset{w\to\infty}{f(w)} = 0$$

表明宇宙总质量为 0。

由此，我们可以认为：宇宙的总质量、总动量等物理基本量的总量为零。作为一个整体来看其性质全是统计性（即宏观），它的微观信息根本不存在。物质的量如时间、空间、质量等只有在宇宙的局部区域才有非零值。

15 广义相对论

当一光子受到一个相距为 r、质量为 M 的物质万有引力作用。

由（5）和（23）式，并一级近似，得：

$$(1+\frac{GM}{r})^2 e_p^2 + (1-\frac{GM}{r})^2 e_m^2 \approx e_P^2 + e_M^2 \qquad (32)$$

$$T = e_P + ie_M = (1+\frac{GM}{r})e_p + (1-\frac{GM}{r})e_m \qquad (33)$$

由于能量动量张量 T 与 dw 有相同的张量变换规律，对于光子运动，得：

$$dw = e_R + ie_T = (1+\frac{GM}{r})e_r + i(1-\frac{GM}{r})e_t \qquad (34)$$

其中 P、M、R、T 是笛卡儿坐标。

足够近似地：

$$dr = (1-\frac{GM}{r})dR$$
$$dt = (1+\frac{GM}{r})dT \tag{35}$$

就是广义相对论的结果。

16 能量动量张量的一阶微分

一质点在没有奇点的区域时，（4）式为 w 的解释函数，得：

$$F = \frac{\partial(mv)}{\partial t} = -\frac{\partial m}{\partial r}$$

在 dm/dt=0 时，dm=dE，设 E 是机械能，得:

$$Fdr = \text{-}dE \tag{36}$$

这是 Newton 方程。

17 薛定谔方程

由：

$$T = p(r,\tau) + im（r,\tau）$$
$$T'' = \frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + i\frac{\partial^2 m}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$
$$T'' = \frac{\partial^2 m}{\partial r\partial\tau} - i\frac{\partial^2 p}{\partial r\partial\tau} = -i\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial\tau}$$

得：

$$-i\frac{\partial^2 T}{\partial r\partial\tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}$$
$$-i\frac{\partial T}{\partial\tau} = dr\nabla^2 T$$

以Ψ代替 T 表示几率。

考虑一维时间三维空间，而对于等号的右边，在一个方向上是 1/4π。在一个波长时，即 dr=λ时：

$$-i\frac{\partial\Psi}{\partial\tau} = \frac{\lambda}{4\pi}\nabla^2\Psi$$

由：

$$m = h\nu$$
$$c = \nu\lambda$$
$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$t = c\tau$

得粒子的薛定谔方程

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi \tag{37}$$

18 能量动量张量的二阶微分

对于（4）式，得：

$$\frac{d^2p}{dr^2} + i\frac{d^2m}{dr^2} = -\frac{d^2p}{dt^2} - i\frac{d^2m}{dt^2}$$

$$\frac{d^2T}{dr^2} + i\frac{d^2T}{dt^2} = 0$$

设 T=φ，作 wick 旋转，得：

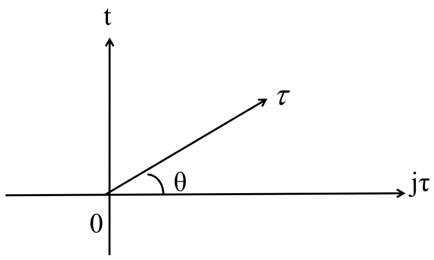
$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} - i\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0 \tag{38}$$

这是波动方程。

19 其他一些问题

（i）时间是否有虚时间？

设时间是二维的:



$\tau = \mathrm{y} + \mathrm{ix}$

$|\tau| = \sqrt{\mathrm{x}^2 + y^2}$

其中

$\mathrm{x}, y \in R$

设 y 为实时间，x 为虚时间。时间成一个平面，虚时间表现历史的多重性，即多重路径。

（ii）保形变换背后是否存在物理意义？

$T = |T|e^{i\theta}$

$T' = \frac{1}{T} = \frac{1}{|T|}e^{-i\theta}$

其模是原来的倒数，质量小的变成质量大了？

参考文献

1.Wolfgang Pauli.Theory of Relativity.November 1958.
2.Ulrich Mosel.Path Integrals in Field Theory:An Introduction.June 2003.
3.Elias M.Stein, Rami Shakarchi. Complex Analysis.August 2002.
4.Zhuopeng Xian.Photon Is the Ultimate Elementary Particle of Matter,ResearchGate GmbH. https://www.researchgate.net/publication/270957826_Photon_Is_the_Ultimate_Elementary_Particle_of_Matter.June 2000.